

## ESTRATEGIA VARIACIONAL PARA MEJORAR LA COMPRESIÓN DEL CONCEPTO DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO.

### QUINTANA, MARIO ENRIQUE

• Profesor en Matemática y Cosmografía – Lic. en Enseñanza de la Matemática. Especialista en Docencia Universitaria. Profesor Asociado. Cátedra: Análisis Matemático. Contador Público – Facultad de Ciencias Empresariales. Universidad de la Cuenca del Plata, Sede Formosa.

• *E-mail*: quintanamario\_for@ucp.edu.ar

### Resumen

La conceptualización de la noción de límite de una función en un punto, como conocimiento generador de conocimientos más complejo, es uno de los desafíos de la enseñanza del análisis matemático, en particular, en la carrera de Contador Público (de la UCP-Sede Formosa). Se afirma que los alumnos aprenden a realizar mecánicamente cálculos de límites, aplicar propiedades y resolver ejercicios y problemas, pero encuentran grandes dificultades en la comprensión del concepto de límite de una función en un punto.

En esta propuesta aplicó los fundamentos del desarrollo del concepto de límite desde estrategias didácticas para su enseñanza a partir del enfoque variacional, dirigida a la construcción de dicho concepto desde una concepción más intuitiva y objetiva.

El análisis de investigaciones acerca de la enseñanza y el apren-

dizaje del concepto de límite desde esta perspectiva y las clases pedagógicas sobre las nociones de límite donde se utiliza el enfoque en la enseñanza del concepto contribuyeron a mejorar su comprensión conceptual.

### Palabras Claves

- Límite de una función
- Enfoque variacional
- Estrategias de enseñanza

### 1.- Introducción y Marco Teórico

Como consecuencia de la escasa comprensión del concepto de límite una función en un punto encontramos estudiantes capaces de resolver ejercicios sobre la temática mediante la aplicación correcta de las reglas o procedimientos correspondientes, pero con grandes dificultades para manejar el significado de límite. Se cree que esto pudiera deberse a que los métodos tradicionales de enseñanza de las matemáticas tienden a centrarse en una práctica algorítmica y algebraica del cálculo, que acaba siendo rutinaria.

Por tal motivo en la construcción del concepto de límites busca utilizar lo menos posible el formalismo matemático y poner en el centro de atención a la variación y la aproximación. De esta manera el límite y sus conceptos asociados se forman como conocimientos matemáticos necesarios para explicar o modelar distintas situaciones.

En Análisis Matemático para los alumnos del segundo año de contador público, se plantea como objetivo que los estudiantes puedan resolver problemas utilizando los conocimientos sobre límites, sus propiedades y aplicaciones. Sólo 3 de cada 10 estudiantes alcanzan esos objetivos planteados y en relación a los dominios utilizados conocen hechos y procedimientos específicos de

la asignatura, tales como: calcular límites, obtener límites finitos e infinitos o salvar indeterminaciones. Más de un cuarto de los estudiantes utilizan aceptablemente algunos conceptos asociados al límite, y sólo un tercio puede aplicar correctamente la idea de límite en la conceptualización de la derivada. Estos resultados extraídos desde las distintas instancias de evaluaciones demuestran la escasa comprensión del concepto de límite de una función en un punto. Los métodos tradicionales de enseñanza de las matemáticas tienden a centrarse en una práctica algorítmica y algebraica del cálculo, que acaba siendo rutinaria. Al respecto, es importante mencionar que la comprensión de conceptos matemáticos es un antecedente primordial para el desarrollo de la capacidad de aplicar lo aprendido de forma segura y creativa, al mismo tiempo que es esencial para el adiestramiento lógico lingüístico, según W. Jungk [1].

Los antecedentes dados por Néliida Priemer y Graciela Lazarte [2]; Silvia Aquere, Adriana Engler, Silvia Vrancken, Daniela Müller, Marcela Hecklein, María Inés Gregorini y Natalia Henzenn [3]; Néliida Priemer y Graciela del C. Lazarte [4]; Adriana Engler, María Inés Gregorini, Silvia Vrancken, Daniela Müller, Marcela Hecklein y Natalia Henzenn [5]; y Mauro Mira López, Julia Valls González, Salvador Llinares [6] sobre el tratamiento del tema en la Enseñanza del límite de una función en un punto permiten argumentar la importancia de este concepto, las mismas se toman como referencia en este trabajo. Las investigaciones nos confirman la importancia de la temática, y la búsqueda permanente de estrategias para la mejora en la comprensión del límite.

De la misma manera para el diseño de la propuesta se utiliza, como base los libros: “Una introducción a la derivada a través de la variación” y “la variación y la derivada” de Crisologo Dolores Flores (1999) y otros trabajos de su autoría [7][8] [9]. En estas obras, se aportan elementos didácticos cuyo fin es propiciar una mejor comprensión de las ideas y conceptos básicos de Cálculo, en especial aquellos que están cercanamente relacionados con límite. Toda la propuesta tiene carácter intuitivo y pretende develar la naturaleza

variacional de conceptos fundamentales del análisis matemático desde planteamiento y resolución de situaciones variacionales elementales. De ahí que el eje rector de dicha obra sea precisamente la variación de la cual se desprenden las ideas y conceptos, propiedades y procedimientos esenciales de esta parte de las matemáticas.

El presente trabajo reporta una estrategia didáctica para la enseñanza del concepto de límite, dirigida a estudiantes de la carrera de Contador Público de la UCP – Sede Formosa, en busca de la apropiación y aplicación del concepto de límite funcional en diversos contextos.

## 2. Metodología

### *Diseño de la Propuesta*

La propuesta consiste en aplicar una estrategia de cambio basada en el Enfoque Variacional que contribuya a la mejora en la comprensión del concepto de límite. Utilizando la idea de variación y proximidad desde del concepto previo y fundamento del límite. Se compone de dos etapas:

#### *Primera Etapa: Aplicación del enfoque variacional y de proximidad en la enseñanza del límite.*

Consiste en aplicar los procedimientos y estrategias de proximidad para hallar el límite de una función en un punto. Si bien la misma radica en un procedimiento intuitivo, se fundamenta sobre razonamientos lógicos y formales. Se introduce la idea de variabilidad y proximidad por medio de un concepto intuitivo del límite funcional. En esta instancia en las clases se aborda Límite de una Función proponiendo a los alumnos determinar el límite de una función en un punto desde la proximidad y cambios infinitamente pequeños.

#### *Segunda Etapa: Evaluación e impacto.*

Se propone ejercicios de aplicación y situaciones más complejas para que desarrollen los alumnos, incentivando su participación; midiendo de esta forma la importancia del uso del enfoque, a fin de



observar el grado de éxito en la mejora de la comprensión del concepto y su aplicación.

### 3. Resultados

En las clases pedagógicas se realiza una revisión de los conocimientos previos, luego el docente propone la función  $f(x) = 2x - 1$ . Se selecciona un elemento del dominio y valores próximos a dicho punto. Seguidamente los estudiantes hallan las imágenes de los puntos próximos (el 3, ver cuadro I). Con acompañamiento del docente analizan los resultados y determinan la aproximación de las imágenes a un número.

**Cuadro I.** Valores de x en un entorno y sus imágenes

x	2,8	2,9	2,99	2,999	...	3	...	3,001	3,01	3,1	3,2
f(x)	4,6	4,8	4,98	4,998	...		...	5,002	5,02	5,2	5,4

El docente pregunta: ¿A qué valor se aproxima las imágenes de la función cuando los valores del dominio se aproximan el centro del entorno reducido? Todos responden satisfactoriamente.

De esta manera se induce al alumno, al concepto de límite de la función en el punto. En algunos alumnos surge el interrogante ¿por qué no calcular la imagen de dicho punto? Ante esta concepción, el docente propuso varias funciones en las cuales en un punto o elemento del dominio su imagen no está definida. Se aplica la estrategia y en la clase se realiza el procedimiento en la pizarra (ver Figura I).

**Figura I.** Desarrollo de la propuesta en la pizarra

También se tomaron casos reales o cotidianos donde se pueda utilizar esta idea de variación y proximidad. De la misma manera el docente solicitó a los alumnos que determinen el límite de otras funciones a fin de que afiancen la estrategia utilizada (ver figura II).

Al finalizar la actividad propuesta por el docente, retoma los interrogantes a fin de afianzar el concepto de límite de una función en un punto:

- ¿Cuáles la imagen de la función en el punto solicitado? ¿Por qué? ¿Qué ocurrió? La mayoría responden que en el punto solicitado no tiene imagen o no está definida. Además responden que al remplazar el valor de dicho punto les da un valor no determinado.
- ¿Cuáles el límite? ¿por qué? Todos coinciden en el mismo resultado. Y concluyen en que se debe a los valores de las imágenes que se aproximan a un valor determinado.
- Entonces, se interroga a la clase: ¿Cuál es el límite de la función en el punto? En este caso los alumnos elaboran una definición aproximada e intuitiva. Se construye el enunciado con ayuda del docente.

**Figura I.**

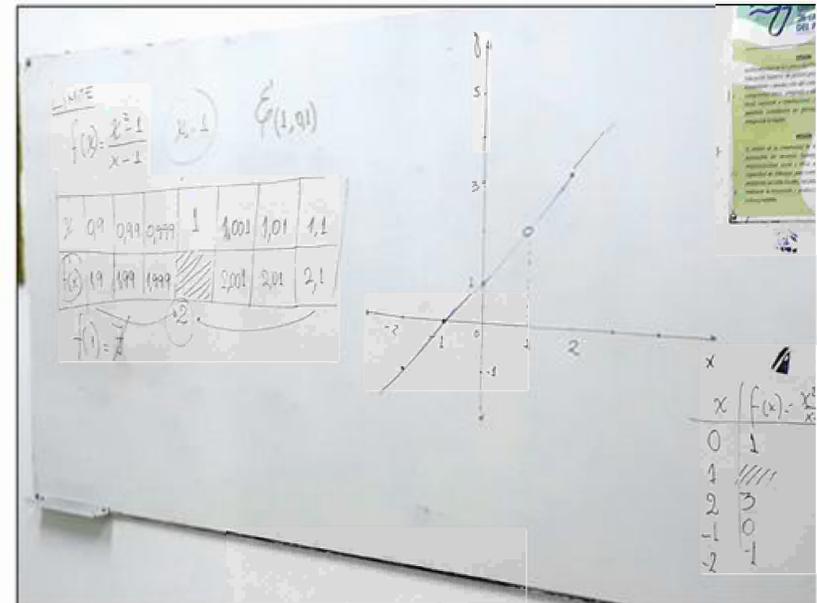
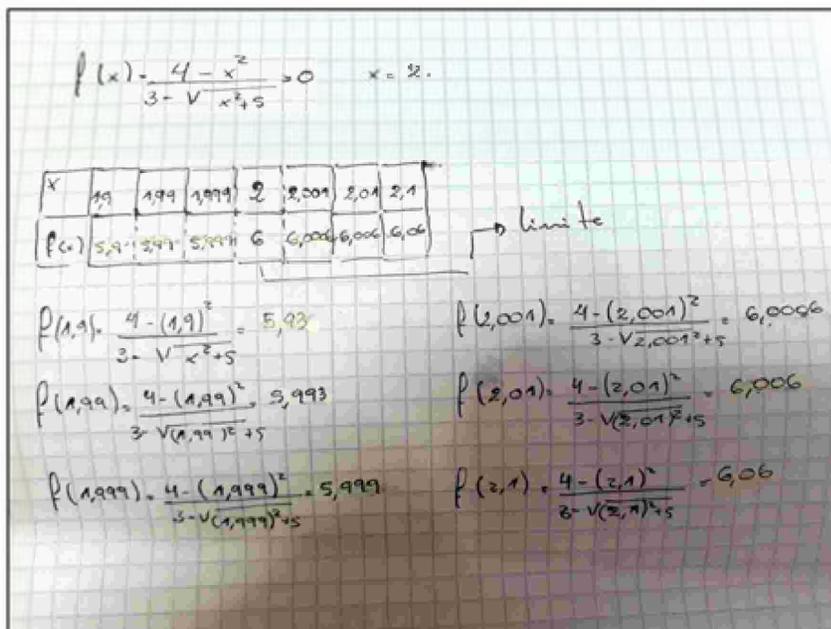


Figura II. Desarrollo de los alumnos



#### 4. Conclusiones

La propuesta pedagógica descrita en el presente trabajo permite al docente analizar las producciones de los alumnos, los procesos de construcción de un concepto fundamental como es “límite”. Estas respuestas proporcionan una idea clara de las concepciones del alumno, por lo que resulta primordial para comprender sus pensamientos.

Se ha logrado mejorar notablemente la comprensión de la idea del límite. También es oportuno remarcar la concentración, la capacidad, la predisposición y el esmero de los alumnos durante estas actividades, actitudes dignas de consideración para trabajar en esta temática. Se observaron resoluciones y aplicación de procedimientos basados en el enfoque propuesto en forma creativa para lograr los resultados, sobre todo en aquellos ejercicios de mayor

complejidad. En muchos casos sorprendió la originalidad en la aplicación de esos procedimientos, indicios que permitieron demostrar una mayor comprensión de la temática. De la misma manera, existe un avance considerable en la maduración y en la incorporación de los conceptos abordados en las actividades.

El análisis y valoración de los resultados de la experiencia sería de utilidad para la toma de decisiones en acciones futuras. Se concibe que este desarrollo no se logra de manera instantánea, es necesaria una preparación adecuada y un seguimiento continuo. Así se puede afirmar que queda pendiente la necesidad de promover otras actividades, como por ejemplos aquellas tareas que conectan los distintos sistemas de representación o registros ya que permiten acercar al alumno al concepto desde diferentes perspectivas, favoreciendo la visualización de las ideas, lo que los llevará a una mejor aprehensión de este concepto.

Es importante destacar que la temática centrada en el concepto del límite no queda agotado en estas experiencias, pues abordar el límite de una función en un punto como eje temático y como conocimiento ordenador de conocimientos de mayor complejidad en Análisis Matemático, comprende dimensiones más complejas.

#### 5. Referencias

- [1] Jungk, W. (1986). Conferencias sobre Metodología de la Enseñanza de la Matemática 2. Segunda parte. Editorial Pueblo y Educación. La Habana.. P. 152
- [2] Nélide Priemer y Graciela Lazarte. Estrategias para la enseñanza de límite de una función. Facultad de Ingeniería. Universidad Nacional de Jujuy. Argentina Acta Latinoamericana de Matemática Educativa Vol. 19. Pag 144 a 149.
- [3] Silvia Aquere, Adriana Engler, Silvia Vrancken, Daniela Müller,



*[Revista Conexiones*

Marcela Hecklein, María Inés Gregorini y Natalia Henzenn (2006). "Una propuesta didáctica para la enseñanza de límite". Facultad de Ciencias Agrarias. Universidad Nacional del Litoral Prov. de Santa Fe. Pag de 14 a 24.

[4] Nélide Priemer y Graciela del C. Lazarte (2009) Propuesta metodológica para la enseñanza del cálculo. Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Jujuy. ECl. Capitulo I. Pag 101 a 106.

[5] Adriana Engler, María Inés Gregorini, Silvia Vrancken, Daniela Müller, Marcela Hecklein y Natalia Henzenn. "El límite infinito: una situación didáctica". Facultad de Ciencias Agrarias - Universidad Nacional del Litoral. Esperanza. Prov. de Santa Fe (Argentina). Pag de 11 a 21.

[6] Mauro Mira López, Julia Valls González, Salvador Llinares (2013). Un experimento de enseñanza sobre el límite de una función. Factores determinantes en una trayectoria de aprendizaje. ISSN: 1815-0640 Número 36. Diciembre de 2013 páginas 89 a 100. [www.fisem.org/web/union](http://www.fisem.org/web/union)

[7] Dolores Flores C. (1999) Una introducción a la derivada a través de la variación. Grupo Editorial Iberoamericano,. Mexico. ISBN 9789706252081

[8] Dolores Flores C. (2001). El desarrollo del pensamiento variacional con estudiantes universitarios. Actas de la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, Vol, 14 , Universidad de Panamá, pp. 337-35

[9] Dolores Flores C. (2008) "la variación y la derivada". Diaz de Santos isbn 9788499696058-.. 2da Edición