

LA DERIVADA DESDE EL ENFOQUE VARIACIONAL EN LAS CLASES PEDAGÓGICAS DE ANÁLISIS MATEMÁTICO.

MARIO ENRIQUE QUINTANA

Profesor en Matemática y Cosmografía – Especialista en Docencia Universitaria. Profesor Asociado. Cátedra: Análisis Matemático. Contador Público - Facultad de Ciencias Empresariales Prof. Asociado. Cátedra Análisis Matemático I y Probabilidad y Estadística Inferencial- Facultad de Ingeniería y Tecnología. Universidad de la Cuenca del Plata, Sede Formosa
E-mail: quintanamario_fsa@ucp.edu.ar

PALABRAS CLAVES

- Derivada.
- Razón de cambio.
- Enseñanza y comprensión del análisis matemático.
- Enfoque variación.

RESUMEN

El aprendizaje de los conocimientos del análisis matemático y en particular, la conceptualización de la noción de derivada, constituye uno de los mayores desafíos de la enseñanza del Análisis Matemático actual. Estamos de acuerdo, con muchos investigadores al respecto, con afirmar que “si bien muchos estudiantes pueden aprender a realizar de manera mecánica cálculos de derivadas, primitivas

y resolver algunos problemas, encuentran grandes dificultades para alcanzar una verdadera comprensión del concepto de derivada”

El propósito de esta propuesta es describir los fundamentos del desarrollo de la derivada sin la noción del límite desde el enfoque variacional y plantear una propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de la derivada a partir del cociente de incrementos, dirigida a estudiantes del segundo año de la carrera de Contador Público de la Universidad de la Cuenca del Plata.

En una primera etapa se realizó la recopilación bibliográfica y análisis de los aportes de las investigaciones acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la derivada, realizadas en el marco de la Matemática Educativa y desde la perspectiva del pensamiento y lenguaje variaciones. El trabajo en esta etapa se analiza la producción de importantes investigadores que se encuentran preocupados y dedicados a producir aportes en la conceptualización de la derivada logrando de esta manera, en los alumnos, el conocimiento y la profundización del enfoque variacional al abordar la derivada.

Luego, en una segunda etapa, planteamos y aplicamos la propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de la derivada a partir del enfoque en las clases de análisis matemático. La aplicación práctica del enfoque variacional en situaciones concretas durante la deducción y el desarrollo del concepto de la derivada como cociente de incrementos permitió la comprensión y apropiación conceptual de la derivada; y la aplicación en diversos contextos económicos.

1. INTRODUCCIÓN Y DELIMITACIÓN DEL PROBLEMA

Estamos convencidos que el Análisis Matemático es el área de las matemáticas de mayor significatividad en los currículos y planes de estudios de distintas carreras universitarias, sobre todo en la formación básica del profesional del contador público. Esta realidad puede explicarse por su funcionalidad al modelar y optimizar diferentes procesos económicos, es utilizada para determinar el produc-

to marginal, elasticidad e importantes funciones económicas, y para desarrollar los procesos de optimización, y si queremos ir más lejos, tanto el óptimo microeconómico del consumidor como del productor, representan un problema de optimización modelado mediante un proceso en derivadas parciales, entre otros.

Pero el análisis del proceso de construcción del concepto de la derivada, remite a resolver el problema histórico de hallar la tangente a una curva, en un punto dado. Como referente se toman los trabajos de Fermat, Newton y Leibniz. Fermat obtuvo un método para hallar la tangente a una curva definida por un polinomio apoyándose en el razonamiento de polinomio y divisibilidad de polinomios. Newton introdujo el concepto de las fluxiones lo que hoy se conoce como derivadas imponiendo así su punto de vista físico para obtener la recta tangente a una curva como el cociente entre las fluxiones. Mientras Leibniz interpreto la tangente a una curva como en cociente de los infinitésimos. Como podemos observar el contexto donde nace este concepto muy importante es totalmente distinto a las exigencias en el ámbito donde se pretende aplicar en la actualidad.

Centramos nuestra atención y análisis en los aportes de las investigaciones acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la derivada, realizadas en el marco de la Matemática Educativa y desde la perspectiva del pensamiento y lenguaje variacional, aportes realizados por investigadores que trabajaron durante los últimos quince años las dificultades que surgen en el aula de matemática al tratar el tema derivada. El trabajo toma la producción del profesor Dr. Crisólogo Dolores [5] y los resultados de otros investigadores de habla hispana que se encuentran preocupados y están dedicados a producir aportes para mejorar el trabajo en el aula del análisis matemático, en particular al tratar la derivada.

En Análisis Matemático se plantea como objetivo general el que los estudiantes puedan resolver problemas utilizando los conocimientos sobre límites, razones de cambio y la derivada (entre otras); hecho el estudio al respecto se concluye que tan sólo 3 de cada 10 estudiantes alcanzan esos objetivos planteados. Por otro

lado en relación a los dominios utilizados, en esta asignatura se obtuvo que cerca de un cuarto de ellos conocen hechos y procedimientos específicos de la asignatura, tales como: calcular límites, obtener derivadas con fórmulas y recordar la definición de derivada; un poco más de un cuarto de los estudiantes utilizan aceptablemente algunos conceptos de Análisis asociados a la derivabilidad y a la existencia de la derivada, y sólo un tercio puede resolver problemas de máximos y mínimos usando derivada. Todos estos resultados extraídos de las evaluaciones parciales, de las instancias de continuas de evaluación y de los exámenes finales de años anteriores.

Creemos que resultados como los encontrados y analizados en las distintas instancias de evaluación descrita en el párrafo anterior, obedecen entre otros, a la escasa comprensión del concepto de derivada. Como consecuencia de este problema podemos encontrar estudiantes capaces de resolver ejercicios sobre derivadas mediante la aplicación correcta de las reglas de derivación correspondientes, pero con grandes dificultades para manejar el significado de la derivada, creemos de igual forma que esto pudiera deberse a que los métodos tradicionales de enseñanza de las matemáticas tienden a centrarse en una práctica algorítmica y algebraica del cálculo, que acaba siendo rutinaria.

Al respecto, es importante mencionar que la comprensión de conceptos matemáticos es un antecedente primordial para el desarrollo de la capacidad de aplicar lo aprendido de forma segura y creativa, al mismo tiempo que es esencial para el adiestramiento lógico lingüístico, además de que permite la transmisión de importantes nociones ideológicas referentes a la teoría del conocimiento según W. Jungk [9].

HIPÓTESIS DE TRABAJO

De ahí que nuestra propuesta aboga por aportar elementos que ayuden a los alumnos a mejorar la comprensión de conceptos, en particular del concepto derivada y aplicarlo sin dificultad a las cien-

cias de la economía. Por las razones expuestas y debido al problema que representa la escasa comprensión del concepto de derivada en el proceso de aprendizaje de los alumnos que estudian para Contador Público, se ha propuesto como objetivo de investigación el diseño y puesta en práctica de una propuesta basada en el Enfoque Variacional que contribuya a la mejora en la comprensión del concepto de derivada en estudiantes que han elegido esta carrera.

La propuesta abordada contribuye específicamente el concepto de derivada, por ello se busca utilizar lo menos posible el formalismo matemático y poner en el centro de atención a la variación. De esta manera la derivada y sus conceptos asociados se forman como conocimientos matemáticos necesarios para explicar o modelar a la variación.

2. MARCO TEÓRICO

Existen numerosos antecedentes sobre el tratamiento del tema en la Enseñanza y , que permiten argumentar la importancia de este enfoque y mejorar la interdisciplinariedad entre las Ciencias Matemáticas y las Ciencias de la Economía en la formación del Contador, en pro de enriquecer la enseñanza y mejorar la comprensión de temas de suma importancia.

Antes de iniciar el análisis concreto sobre el enfoque es propicio primero tomar las conclusiones a las que arribó Mariano Iriarte [8] en su trabajo *¿qué es y para qué sirve una derivada?*, desde las explicaciones expresadas en su página se trata de observar un poco mejor lo que es y para qué sirve una derivada. Opina que "...nadie puede entender bien una derivada o una integral o cualquier otro concepto fundador del conocimiento si no es capaz de sentirlo, observarlo, imaginarlo. Mis explicaciones han buscado visualizar el concepto..." este es el inicio para luego abordar los siguientes trabajos.

Savador Llinares [10] en su trabajo *"La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática"* revisa

y organiza las aportaciones de las investigaciones hechas en Matemática Educativa para identificar el conocimiento generado La revisión se ha estructurado considerando: a) lo que se conoce sobre la comprensión de la derivada de una función en un punto; b) el papel que desempeñan los sistemas de representación; c) las características del desarrollo del esquema de derivada. Por último, se identifican líneas de investigación necesarias para aumentar nuestra comprensión de cómo los estudiantes dotan de significado y usan el concepto de derivada"

Luego haciendo especial mención y análisis profundo de los trabajos del autor e investigador Crisólogo Dolores Flores [8] en su obra "una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada" concluye que "el problema que motiva esta investigación radica en que, con los cursos tradicionales de Cálculo Diferencial en el preuniversitario, cantidades significativas de estudiantes no logran comprender sus conceptos básicos, en especial el concepto de derivada. El proyecto tiene como objetivo el de elaborar una Propuesta Didáctica que contribuya a la comprensión del concepto de derivada a través de la formación de ideas variacionales, particularmente a través de la noción de rapidez de la variación". De la misma manera en la propuestas "Desarrollo del concepto de la derivada sin la noción del límite" diseñada y elaborada por Yeimy Alexandra Lozano Robayo [11] confirma que "...el concepto de la derivada, como un cociente incremental infinitesimal, fue de gran ayuda en la resolución de muchos problemas tanto matemáticos como físicos a través de la historia, es así como Cornu [2] afirma "La derivada no es una aplicación del concepto de límite sino todo lo contrario, el cálculo de derivadas es el que ha conducido hacia este concepto". Y concluye que "en la enseñanza de las matemáticas se hace necesario trabajar haciendo uso de modelos sencillos y prácticos, es por eso que esta propuesta para el desarrollo del concepto de la derivada se inicia a través del cociente incremental, que conlleven al estudiante a conceptualizar el límite de una forma natural. Por consiguiente se recomienda incluir esta propuesta al currículo y al plan de estudio de la básica secundaria específicamente en el grado once".

Cancio Díaz, Y [1] en su trabajo "Aplicaciones de la derivada: un enfoque para estudiantes de economía" concluye que uno de los grupos temáticos de la Matemática Superior que más se aplica a la Economía es, sin duda, la derivada. Es utilizada para determinar el producto marginal, elasticidad e importantes funciones económicas, y para desarrollar los procesos de optimización. Tanto el óptimo microeconómico del consumidor como del productor, representan un problema de optimización modelado mediante un proceso en derivadas parciales. Este documento ilustra algunas de las aplicaciones de la derivada de las funciones de una variable independiente, con énfasis en las aplicaciones económicas.

3. METODOLOGÍA

3.1. Primera etapa: Enseñanza y el aprendizaje de la derivada, desde el enfoque variacional

En un primer momento se ha realizado una revisión bibliográfica y elaboración de informe conceptual. Esta investigación bibliográfica sobre la temática fue necesario por considerar que este tema es un pilar para una construcción adecuada e importante dado que la utilidad del enfoque variacional es eje de la propuesta. También se investigaron y analizaron las demás tendencias: el enfoque algebraico, el numérico, el formal, el infinitesimalista, el geométrico, y el computacional. Luego se realizó una comparación de estos enfoques con el enfoque en cuestión.

3.1.1. Conclusiones sobre el análisis de los textos

En esta propuesta se aborda la enseñanza de la derivada desde un enfoque distinto basada en autores, como Crisólogo Dolores Flores [4], que han experimentado y aportado constantemente a esta temática.

Partamos que la enseñanza de la derivada ha dependido principalmente de los textos que utilizan generalmente los profesores,

predominando dos tendencias fundamentales según Dolores Flores [6]: en una, la organización del contenido clásico se organiza como en el Análisis Matemático para buscarle sus aplicaciones, en la otra, el contenido se genera mediante la necesidad de resolver problemas prácticos. Respecto de la primera tendencia los autores señalan los enfoques *algebraico*, *numérico*, *formal* y *aproximación afín local*, en la segunda tendencia nombra al enfoque *geométrico* y al *variacional*. A estas dos tendencias habría que agregar una más, el uso de la tecnología, que está cobrando mucho interés por parte de investigadores. El enfoque algebraico, prioriza el trabajo con los algoritmos, principalmente con la regla general de derivación; en el enfoque numérico es característico el uso abundante de sucesiones numéricas; en el enfoque formal, los contenidos comprenden el conjunto de los números Reales, el concepto de función como un caso particular de relaciones, la definición del límite en términos de ϵ y una definición rigurosa de la continuidad por medio del límite. Para introducir el concepto de derivada bajo el enfoque de aproximación afín local, se parte de la idea de coeficiente direccional (pendiente) de la recta para definir la pendiente de la secante, estas definiciones sirven de base para introducir los conceptos de velocidad media y de velocidad instantánea. Hecho esto, se introduce la idea de tangente como el límite de una sucesión de secantes y con ello se establece la noción de aproximación afín.

Mientras que la segunda tendencia, el enfoque geométrico prioriza el significado y la utilidad práctica que la derivada tiene en la resolución de problemas, en el enfoque variacional se propone cambiar el papel principal que la asignatura de análisis matemático confieren al concepto de límite y pone en su lugar a la variación física. No se sugiere tratar tan exhaustivamente las funciones, sino más bien las cantidades y las magnitudes.

Por ello para el diseño de la propuesta se utiliza, como base los libros "Una introducción a la derivada a través de la variación" y "la variación y la derivada" de Crisólogo Dolores Flores [4][7]. En estas obras, se aportan elementos didácticos cuyo fin es propiciar una me-

mejor comprensión de las ideas y conceptos básicos de Cálculo, en especial aquellos que están cercanamente relacionados con la derivada. Esta introducción a la derivada tiene carácter intuitivo y pretende develar la naturaleza variacional de la derivada a partir del planteamiento y resolución de situaciones variacionales elementales. De ahí que el eje rector de dicha obra sea precisamente la variación de la cual se desprenden las ideas y conceptos, propiedades y procedimientos esenciales de esta parte de las matemáticas.

De esta forma la propuesta que implementamos toma como ejes directrices a la variación, por las razones que ya mencionamos y a la transición entre registros, esto último porque creemos que, un alumno no tendrá una comprensión completa del concepto de derivada si no puede reconocer y construir cada uno de los procesos involucrados en la comprensión de la derivada en cualquier registro (geométrico, numérico, algebraico, analítico, físico, verbal).

De esta manera el enfoque variacional, remueve el discurso matemático institucionalizado desde el fondo, cambiando el papel principal que en las clases de análisis matemático le confieren al concepto de límite y poniendo en su lugar a la variación física, de tal manera que no se sugiere tratar tan exhaustivamente las funciones, sino más bien las cantidades y las magnitudes. Al concretar estas ideas, se parte de las razones de cambio promedio obtenidas del estudio de fenómenos de la vida diaria y se arriba a la derivada como razón de cambio instantánea por medio de un manejo intuitivo del límite.

3.2. Segunda Etapa: aplicación del enfoque variacional en las clases de análisis matemático

En primer lugar se consideraron ejercicios preparatorios y de diagnósticos para la aplicación del enfoque variacional: medición de cambio, rapidez media, velocidad y tasas de cambio, etc.

Luego se abordó con los alumnos la formación del concepto de derivada basada en el enfoque propuesto. Se consideraron los siguientes temas: la rapidez media de la variación, rapidez de cambio de un fenómeno; los cambios infinitamente pequeños y la velocidad

instantánea; interpretación de la velocidad media, cálculo de velocidades medias y su uso cotidiano.

En un primer momento se introduce la idea inicial para abordar la variación de la función creciente o decreciente. En este sentido los alumnos comentaban conocer que una función crece más rápido comparándola con otra analizando las imágenes de cada una, pero se concluye que esta idea es solo observacional. Esta comparación resulto adecuada para la comprensión de la noción de cambio para un 90% de los alumnos. Es decir se logra comparar la rapidez de variación pero no medirla.

La segunda idea consistió en cómo medir la rapidez de variación a fin de poder comparar en forma objetiva la rapidez de crecimiento o decrecimiento de una función con respecto a las otras. De esta manera surgió la necesidad de realizar un cociente de variación de una de las variables (dependiente) en función de la otra (independiente). Al hallar esta razón permitió comparar numéricamente dicha rapidez en las distintas funciones (figura 1 y 2).

Al siguiente interrogante: *¿Cómo se halla dicho cociente? ¿Que mide la razón hallada?*

Los alumnos realizaron lo siguiente:

FIGURA 1:

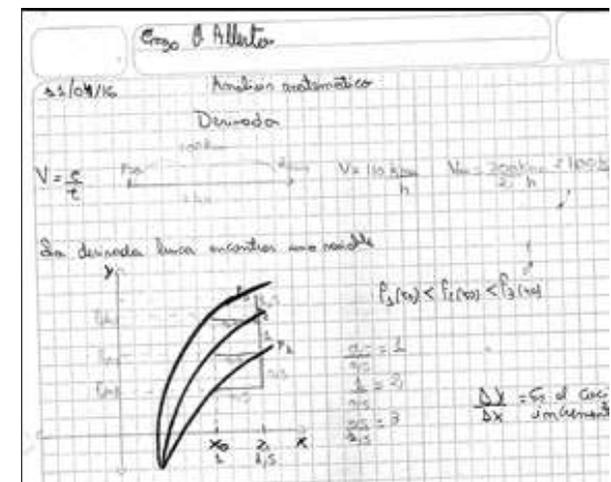
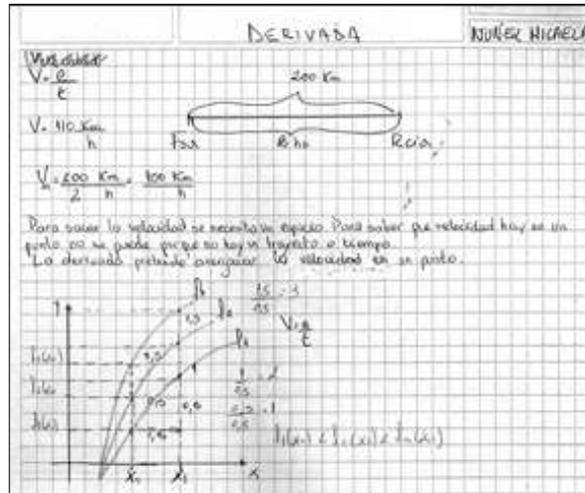


FIGURA 2:



RESPUESTAS

- Mide el crecimiento de la función en un intervalo
- Mide la rapidez de variación de las funciones en un incremento considerado de x
- El número de veces que aumento o disminuyó la variable dependiente con respecto a la variable independiente.

Realizan los cocientes respectivos para cada una de las funciones y comparan.

A la pregunta: *¿qué conclusiones puedes observar?*

Responden en su mayoría (muy pocos solo un 20%): *a mayor valor la rapidez de cambio en el intervalo considerado la función crece más rápido que las demás que poseen un menor cociente.*

En un segundo momento se plantea la necesidad de hallar la velocidad o rapidez de cambio en un punto en una función. Ante este cuestionamiento los alumnos no encuentran respuesta.

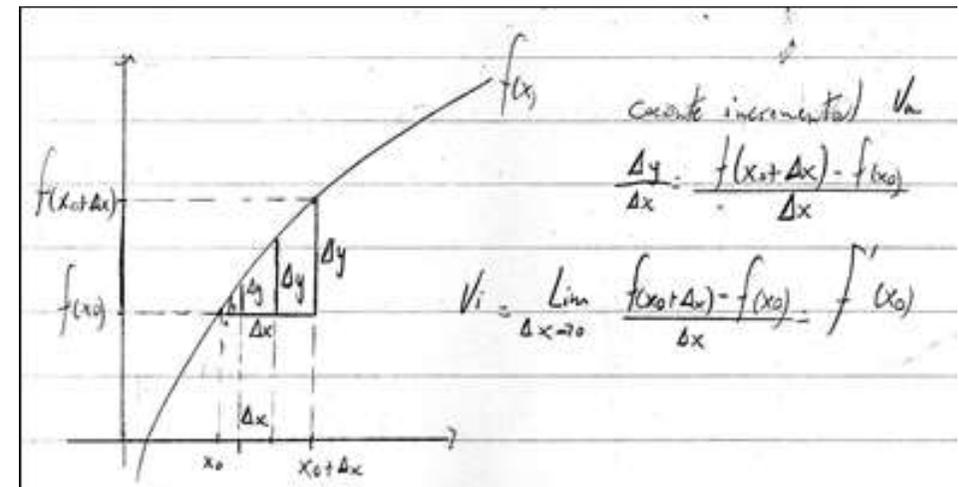
Se sugiere seleccionar un punto o valor en el dominio o en la variable x. Luego desde dicho punto o valor en x, (denominado x0) se propone reducir la magnitud del intervalo. Seguidamente se planteo los mismos procedimientos anteriores para hallar el cociente que

determinó la velocidad de cambio en un intervalo (figura 3),.

Al consultar a los alumnos: *¿Qué observan cuando se reduce los intervalos o incrementos?*

Responden todos: *los cocientes cambian, es decir, la velocidad de variación cambia al cambiar los intervalos. Por lo tanto la rapidez no es constante en cada intervalo.*

FIGURA 3:



Luego se propuso reducir el incremento de la variable independiente, de tal manera de acercarnos o aproximarnos al punto seleccionado.

Preguntamos: *¿A qué concepto nos estamos refiriendo al aplicar este procedimiento?*

Solo unos pocos (un 30% de los presentes) responden: *a limite de una función!!*

Al preguntar a los alumnos: *¿Qué sucede con el incremento de la variable independiente?*

La mayoría (no todos, un 80%) responden: *disminuye!!!*

Debido a los distintos cuestionamientos y a la falta de claridad por parte de los alumnos se opta por tomar un ejemplo concreto. Se toma una función sencilla $f(x) = x^2$, y los alumnos seleccionaron el

punto $x_0 = 1$.

A fin de realizar un análisis exhaustivo de la situación se propuso las siguientes consignas:

1. Determinar los valores del incremento de la variable independiente de tal manera que se aproxime a 0 (cero)
2. Para cada valor del incremento de la variable independiente determine el valor del incremento de la variable dependiente
3. Determinar el cociente de los incrementos (la razón) para cada valor de los incrementos
4. Luego responda: ¿a que valor se aproxima el cociente de los incrementos cuando el incremento de la variable independiente tiende a 0 (cero)?

Todos realizaron el gráfico de la función, ubicaron el punto seleccionado y construyeron una tabla teniendo en cuenta los distintos valores del incremento en la variable independiente, realizaron los cálculos correspondientes y completaron dicha tabla (figura 4, 5 y 6).

FIGURA 4:

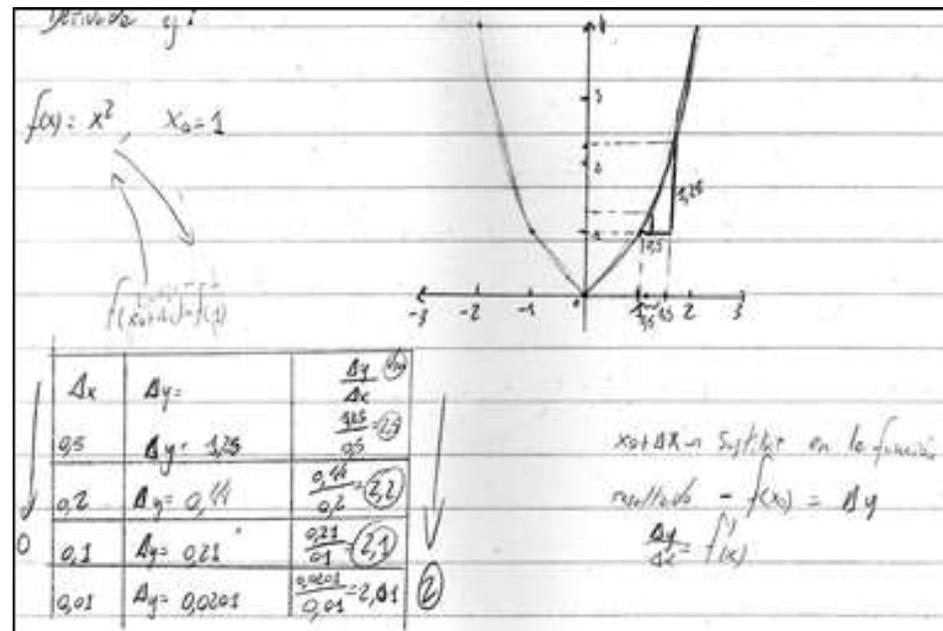


FIGURA 5:

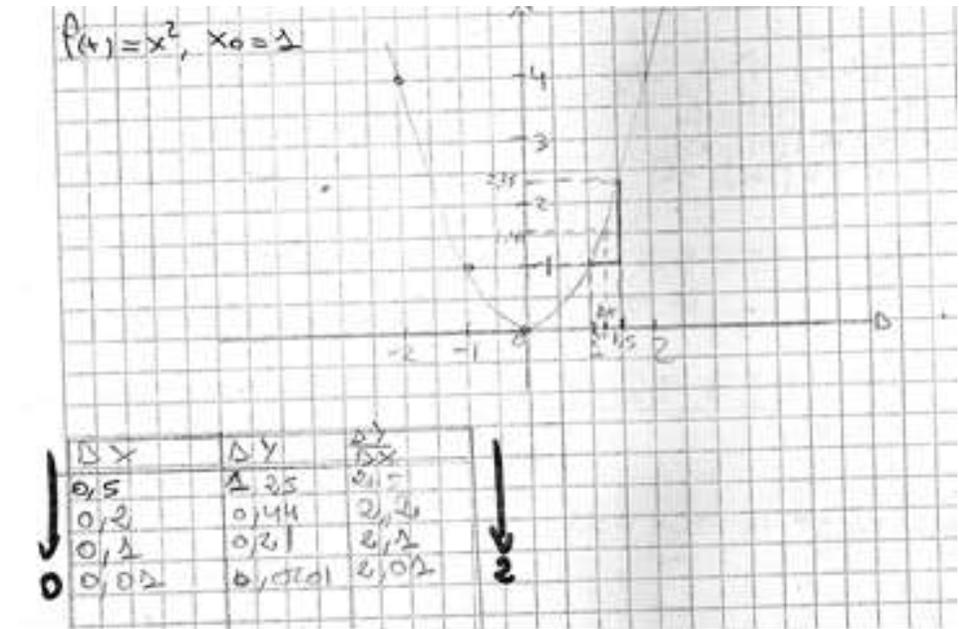
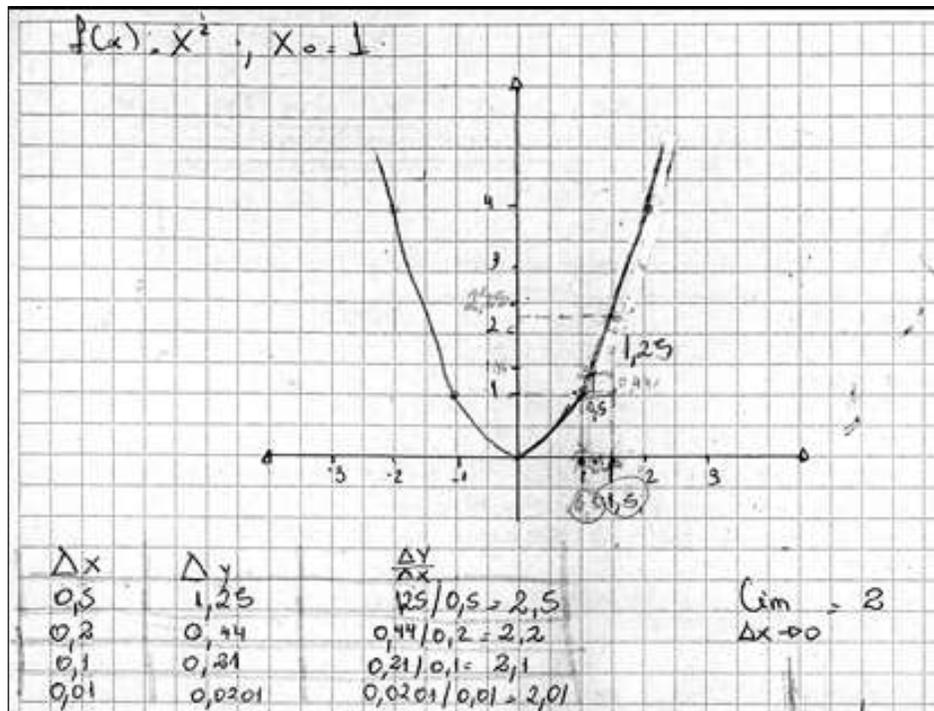


FIGURA 6:



Observemos que la respuesta a la última pregunta se halla señalada con las flechas hacia abajo.

Resultados de la consigna planteada:

1. Un 30% de los alumnos determinaron valores mínimos y los demás tomaron valores muy grandes, en contra de lo que habíamos deducidos.
2. Solo un 50% calcularon exactamente el incremento de la variable dependiente, se observó que estos alumnos con dificultades no encontraban que procedimiento utilizar para hallar lo solicitado.
3. Para el cálculo del cociente de los incrementos (la razón) para cada valor de los incrementos no hubo inconveniente
4. Todos responden, casi en un 90%, de manera sorprendente lo correcto, además, señalan en la tabla hacia que número se aproxima el

cociente cuando el incremento de la variable independiente tiende a cero (en la figura se observa la flecha que indica dicho valor).

3.2.1. Conclusiones sobre las clases desde el enfoque

Se lograron grandes avances en las ideas fundamentales de cociente incremental, razón de cambio, límite del cociente incremental, incremento de la variable independiente cuando tiende a cero, etc. y sus interpretaciones. El alumno pudo identificar la idea de límite como aproximación a un valor (ver figuras 4,5 y 6) y de derivada como límite de un cociente, cuando el incremento de la variable independiente se reduce al máximo. Hasta se llegó a concretar la idea de interminaciones y su cálculo.

El alumno logró construir su propio concepto de derivada desde la noción de velocidad media de variación hasta llegar a velocidad instantánea o rapidez de cambio en un punto, desde la perspectiva del enfoque propuesto.

De la misma manera la representación gráfica de cada situación les proporcionó a los alumnos la observación más concreta de lo que estaba realizando mientras construían la idea de derivada en un punto; permitiéndolo relacionar lo que realizaban analíticamente con lo diseñado en el gráfico.

4. CONCLUSIONES

El estudio y análisis de los aportes de las investigaciones acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la derivada, realizadas en el marco de la Matemática Educativa y desde la perspectiva del pensamiento y lenguaje variacional, nos otorgaron los elementos necesarios para trabajar en las clases de análisis matemático, mejorando la comprensión del concepto de derivada para luego aplicar a distintas situaciones económicas.

Al abordar la clase desde el enfoque variacional posibilitaron el

Al abordar la clase desde el enfoque variacional posibilitaron el desarrollo de la noción de la derivada en su máxima comprensión, los alumnos pudieron identificar los distintos momentos en la construcción del concepto. La clase participativa con constantes interrogatorios pretendieron de alguna manera despertar en los alumnos la exploración y el análisis de los conocimientos básicos de la derivada. Lograron aplicar los fundamentos del procedimiento variacional en situaciones de aprendizaje sobre la base concreta de los algoritmos y procedimientos del enfoque variacional.

Es oportuno remarcar la concentración, la capacidad, la predisposición y el esmero de los alumnos durante estas actividades, actitudes dignas de consideración para trabajar en esta temática.

Se observaron resoluciones y aplicación de procedimientos basados en el enfoque propuesto en forma creativa para lograr los resultados, sobre todo en aquellos ejercicios de mayor complejidad. En muchos casos sorprendió la originalidad en la aplicación de esos procedimientos, indicios que permitieron demostrar una mayor comprensión de la temática. De la misma manera, existe un avance considerable en la maduración y en la incorporación de los conceptos abordados en las actividades.

De esta manera validamos lo supuesto con anterioridad: el aprendizaje de la derivada, partiendo de estrategias gráficas, algebraicas y analíticas basadas en el enfoque variacional permitió, en general, una mejor comprensión y aplicación, de parte de los alumnos, de la derivada de una función en un punto.

De la misma manera nos permitió diseñar y plantear propuestas de aprendizaje desde los procedimientos propios del enfoque valorando cada uno de los procesos involucrados en la comprensión de la derivada en cualquier registro (geométrico, numérico, algebraico, analítico, físico, verbal).

Todo este proceso permitió desarrollar las habilidades propias del pensamiento y del lenguaje variacional con el propósito de aplicarlas para la comprensión de la derivada en las asignaturas de Análisis Matemático de la carrera de contador Público y de esta mane-

ra mejorar su comprensión y aplicación en contextos económicos.

Es importante destacar que la temática centrada en el Enfoque Variacional no queda agotada en estas experiencias, pues abordar la derivada como eje y nexo de articulación entre la Matemática y las Ciencias de la economía” en la carrera, comprende dimensiones más complejas, como la enseñanza y el aprendizaje.

5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Cancio Díaz, Y.(2009) “Aplicaciones de la derivada: un enfoque para estudiantes de Economía” en Contribuciones a la Economía, abril. en <http://www.eumed.net/ce/2009a/>
2. Cornu, B. (1983). Apprentissage de la notion de limite: conceptions et obstacles. Grenoble: Université I de Grenoble. (Thèse de 3ème cycle, Mathématiques).
3. Dolores Flores C.(2007), Matemática educativa, algunos aspectos de la socioepistemología y la visualización en el aula. Ediciones Díaz de Santos, México 2007.
4. Dolores Flores C. (1999) Una introducción a la derivada a través de la variación. Grupo Editorial Iberoamericano,. Mexico. ISBN 9789706252081.
5. Dolores Flores C.(2000). El futuro del cálculo infinitesimal. Capítulo V: ICME-8 Sevilla, España. Cantoral R. Grupo Editorial Iberoamericana. México D. F,
6. Dolores Flores C. (2001). El desarrollo del pensamiento variacional con estudiantes universitarios. Actas de la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, Vol, 14, Universidad de Panamá, pp. 337-35
7. Dolores Flores C. (2008) “la variación y la derivada”. Diaz de Santos isbn 9788499696058-.. 2da Edición.
8. Iriarte Mariano. (2012) ¿qué es y para qué sirve una derivada? Escrito en inress: valores-participación. 18 de Julio 2012. <http://www.inress.com/valores-participacion/2012/07/28/%C2%BF-que-es-y-para-que-sirve-una-derivada/>

9. Jungk, W. (1986). Conferencias sobre Metodología de la Enseñanza de la Matemática 2. Segunda parte. Editorial Pueblo y Educación. La Habana. P. 152
10. Llinares Savador. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática, La revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Mayo 2008.
11. Lozano Robayo Y. A. (2011) Trabajo de Grado para Optar por el Título de Matemático. Fundación Universitaria Konrad Lorenz. Facultad de Matemáticas e Ingenierías. Bogotá, julio de 2011 yeim-yalex@yaho.com

