INTEGRALES MÚLTIPLES: ERRORES Y DIFICULTADES PRESENTES EN UNA EVALUACIÓN ESCRITA LLEVADA A CABO EN LAS CARRERAS DE LOS PROFESORADOS EN MATEMÁTICA Y EN FÍSICA DE LA UNAM.

Gretel Alejandrina Fernández von Metzen, Patricia Vila Torres, Claudia Mariela Zang, María Natalia León
gretelalefernandez@gmail.com

Universidad Nacional de Misiones

Resumen
Este trabajo presenta y analiza procedimientos utilizados por alumnos de los profesorados en Matemática y en Física al resolver una consigna de parcial relativa a integrales múltiples. La finalidad fue recabar información acerca de los conocimientos que los mismos ponen en juego al resolverlas y que se manifiestan de manera indirecta a través de sus producciones. Los docentes que integran este grupo de investigación asumen que es importante el análisis de los errores como mecanismo proveedor de información acerca de los saberes que los estudiantes adquieren en el proceso de aprendizaje y como disparador para la eventual reformulación de prácticas pedagógicas. La información que se expone se obtuvo a través de la metodología que provee la Ingeniería Didáctica. El estudio realizado refleja las dificultades que tienen los estudiantes para representar gráficamente las regiones sobre las que se evalúan las integrales y la determinación de los límites de integración, en particular cuando las superficies involucradas no están centradas en el origen. Del análisis se observa, entre otras cosas, que la operatoria algebraica asociada a la resolución de integrales no resulta problemática para el estudiante.

Palabras clave: Integrales múltiples, errores, Ingeniería Didáctica

Abstract
This work presents and analyzes procedures used by students of the Mathematics and Physics teachers' careers when solving a setpoint of partial exam relative to multiple integrals. The purpose was to collect information about the knowledge that they put into play when solving them and that are manifested indirectly through their productions. The teachers who make up this research group assume that the analysis of errors is important as a mechanism for providing information about the knowledge that students acquire in the learning process and as a trigger for the eventual reformulation of pedagogical practices. The information presented was obtained through the methodology provided by the Didactic Engineering. The study carried out reflects the difficulties that students have in graphically representing the regions on which the integrals are evaluated and in determining the limits of integration, particularly when the surfaces involved are not centered on the origin. The analysis shows, among other things, that the algebraic operation associated with the resolution of integrals is not problematic for the student.

Key words: Multiple integrals, errors, Didactic Engineering

Introducción

Este trabajo se realizó en el marco de un proyecto de investigación cuya temática gira en torno a las dificultades por parte de los estudiantes cuando se los enfrenta a la resolución de ejercicios que involucran integrales múltiples. La intención es describir las estrategias utilizadas en la resolución de ejercicios típicos y que la explicitación de éstas permita utilizarlas como insumo para la reflexión de la propia práctica docente.

Las autoras de este documento, involucradas en la enseñanza de Cálculo y Análisis Matemático en carreras de grado de las Facultades de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales (FCEQyN) dependiente de la Universidad Nacional de Misiones (UNaM), han observado en los alumnos dificultades en el abordaje del tema que a medida que se desarrolla el programa, tienden a ser enfrentadas recurriendo a una serie de técnicas que les permiten avanzar en un campo de débil dominio conceptual. Los contenidos previos no son resignificados ni utilizados como un mecanismo de validación, se detecta poca solidez en la coordinación entre registros de representación semiótica, además de conflictos en el tratamiento de transformación de coordenadas.

La experiencia en la enseñanza de integrales múltiples y la observación de errores recurrentes de los estudiantes en el manejo de las mismas motivó a analizar los diferentes aspectos que hacen a la enseñanza del tema en la institución antes mencionada. Como parte de las actividades llevadas adelante en el marco del proyecto, se realizó el análisis de la bibliografía utilizada en el ámbito académico, se confeccionaron e implementaron secuencias de enseñanza focalizándolas en aspectos vinculadas a la definición, se ofrecieron talleres vinculados a la temática y se realizó el análisis de los errores que cometen los estudiantes al resolver cuestiones ligadas a integrales múltiples en situación de examen.

En lo que respecta a este trabajo, la discusión se centrará en analizar las respuestas dadas por los alumnos de las carreras de Profesorado en Matemática y Profesorado en Física a una consigna que formaba parte del segundo examen parcial de la asignatura Análisis III (correspondiente al ciclo lectivo 2017), con objeto de identificar y describir los errores más habituales en que incurren.

Se considera pertinente indagar sobre los errores ya que son una preocupación constante para los docentes, dado que éstos emergen de manera natural y sistemática en el proceso de construcción de conocimientos y en el proceso de evaluación. Identificarlos, significaría un avance en la planificación y en el diseño de nuevas propuestas áulicas, con la finalidad de transformarlos en una situación de aprendizaje. Además, la problemática resulta de interés, dado que son incipientes las investigaciones referidas a eventuales obstáculos en el aprendizaje de los conceptos del análisis matemático. Las cuestiones vinculadas a su didáctica constituyen un campo relativamente joven dentro de la Didáctica de la Matemática. Los reportes encontrados se circunscriben mayoritariamente a las dificultades observadas en el ámbito del cálculo y del pre-cálculo, siendo escasas las publicaciones referidas a los obstáculos en el aprendizaje de las integrales múltiples.

En los apartados siguientes se describen el marco teórico que orientó este trabajo y los lineamientos metodológicos seguidos, se exponen además los resultados obtenidos y finalmente, se esbozan reflexiones emanadas del análisis realizado.

Marco teórico

La visión que se tenga de la Matemática y de su aprendizaje influye en la manera en que se concibe al error, tanto en lo que respecta a su génesis como a su análisis e interpretación, supone la adhesión a un determinado marco teórico de referencia. Desde la investigación en educación se advierte que las concepciones e interpretaciones cambian de acuerdo al paradigma en que éstas se fundamentan. En particular, el significado dado al error varía según sea considerado desde el conductismo o el constructivismo.

Tradicionalmente, en el marco del conductismo, se atribuye la responsabilidad del error al alumno y se intenta corregirlo poniendo a éste en situaciones que lo enfrenten a resolver ejercicios similares. En este sentido, el error es entendido como una ausencia de saber en el estudiante (no presta atención, no acata las directivas del profesor, no visualiza el placer en el conocimiento, etc.), que debe ser sancionado, y recae en el docente la tarea de señalar los errores y sustituir la técnica equivocada por una adecuada.

A partir de los años sesenta, bajo la perspectiva constructivista, el error es entendido como la manifestación de un saber que genera mecanismos de construcción de conocimiento para el sujeto, ya sea completando, modificando o corrigiendo el erróneo (D'AMORE, 2008). Al respecto, Rico (1995), señala:

"**no hay fuentes últimas del conocimiento**, admitir que todo conocimiento es humano, que está mezclado con nuestros errores y nuestros prejuicios. Esto lleva a **admitir el error como parte constituyente de nuestra adquisición del conocimiento**". (RICO, 1995, p. 73)[1]

Debido a la multiplicidad de significados que adquiere el vocablo y con objeto de evitar vaguedades, se considerará al error en el sentido propuesto por Brousseau (1983), esto es, considerar que el error no es sólo el efecto de la ignorancia, de la incertidumbre o del azar, como sostenían las teorías conductistas del aprendizaje, sino el efecto de un conocimiento anterior que en cierto dominio de acciones tenía su interés y resultaba exitoso pero que ahora se revela como erróneo o inadaptado.

Aspectos metodológicos

Contexto educativo

Los alumnos que participaron de la investigación son estudiantes que cursaron, durante el ciclo lectivo 2017, la asignatura Análisis Matemático III, correspondiente al segundo cuatrimestre del segundo año de las carreras Profesorado en Matemática y Profesorado en Física de la FCEQyN-UNaM. Particularmente, en este trabajo se analizaron las respuestas dadas por los alumnos a un problema incluido en el segundo examen parcial de la asignatura y que consistía, en líneas generales, en la representación gráfica de dos regiones de integración y la identificación de los correspondientes límites de integración en problemas relativos a integrales múltiples.

El examen fue rendido por 9 alumnos, de los cuales 8responden al ejercicio que se analiza en este documento.

Si se toman en consideración las descripciones efectuadas por Bardín (1996) y Ander-Egg (2010) sobre las diferentes metodologías de investigación en Ciencias Sociales, la modalidad de estudio adoptada en el presente trabajo responde a un enfoque descriptivo, pues se usaron técnicas de análisis de contenido que viabilizaron la recopilación de datos con propósitos concretos prefijados por los investigadores.

La ingeniería didáctica

Desde la Ingeniería Didáctica se propone un esquema experimental basado en las realizaciones didácticas en clase delineadas a partir de un trabajo de "concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza". El proceso de la Ingeniería que se adoptó para el análisis de la consigna dada en el examen parcial, contempló cuatro fases: análisis preliminar, concepción y análisis a priori, experimentación y finalmente análisis a posteriori y evaluación. En este trabajo la atención se centró en la confrontación entre la segunda y cuarta fase (Artigue, 1995), lo cual constituye el foco de la validación de esta metodología.

Discusión de los resultados

Propuesta de trabajo y tipos de errores observados

[1]Las letras en negritas pertenecen a Rico.

En situación de examen parcial, se presentó la consigna que se expone en la figura 1.

Figura 1. Consigna propuesta a los alumnos

1- Dada las siguientes regiones:
Región A: El recinto interior al cilindro $x^2 + y^2 = 2x$y comprendido entre los planos *z*=0 y *z*=3.
Región B: La región bajo el paraboloide $z = x^2 + y^2$ e interior al cilindro circular recto$y^2 + x^2 = 1$
1.1) Grafique ambas regiones.
1.2) Plantee la forma de calcular el volumen de las regiones A y B
1.3) Elija uno de las dos regiones y halle el volumen.

A continuación, se presenta una descripción de las tareas realizadas en el marco de las diferentes fases de la Ingeniería.

Análisis a priori
Ítem 1.1)
Se esperaba que con la representación gráfica de las superficies los estudiantes pudieran visualizar el sólido generado a partir de la intersección de las mismas. A su vez, ésta podría favorecer la identificación de los límites de integración. Experiencias anteriores permitieron detectar que los gráficos no emergen espontáneamente en los estudiantes como un recurso válido para el correcto planteo de las integrales, a menos que esto sea solicitado en la consigna.

Región A:
De las superficies dadas, se preveía que la que mayor dificultad podría generar al momento de la representación fuese el cilindro. Esto en virtud de que éste no está centrado en el origen y, frente a la ausencia explícita de la variable *z*en la expresión algebraica, los estudiantes, quisieran representarlo como una curva plana.

Región B:
Las gráficas de estas superficies no presentan mayores dificultades, ambas están centradas en el origen y representan casos de uso habitual en el desarrollo de las clases y en los libros de textos. El desafío reside en visualizar correctamente la región comprendida por debajo del paraboloide e interior al cilindro.

Ítem 1.2)
La consigna fue redactada de forma amplia, en la que no se explicita método o forma de resolución particular.

Región A:
En este caso, una forma rápida de resolución consistiría en plantear la fórmula para el cálculo del volumen de un cilindro ($V = \pi.r^2.h$) sin usar integrales múltiples. Otro procedimiento sería formular los procesos de integración desarrollados en clases, usando integrales dobles o triples, y en cada una de ellas la posibilidad de plantear sistemas diferentes de coordenadas: cartesianas, polares o cilíndricas.
Las posibles formas de planteo del cálculo del volumen son los siguientes:

- Si se recurre a la aplicación de la fórmula: $V = \pi.r^2.h$, se tendrá que identificar el valor del radio (*r*) y de la altura (*h*), los cuales no son inmediatos. Para hallar el valor de *r* deberá completar cuadrados en la expresión$x^2 + y^2 = 2x$,para obtener la ecuación equivalente$(x-1)^2 + y^2 = 1$. La altura estará dada por la intersección del plano $z = 3$ con el cilindro.

- Si se plantea integrales dobles en sistemas de coordenadas cartesianas, deberían lograr identificar la función a integrar $f(x,y)$ como la diferencia entre $z = 3$ y $z = 0$, quedando $f(x,y) = 3$. Asimismo determinarla región de integración como la proyección en el plano *xy* resultante de la intersección entre el plano $z = 3$ y el cilindro, que en este caso será la circunferencia generatriz del cilindro $(x-1)^2 + y^2 = 1$. Se tendría que $0 \leq x \leq 2$ e $-\sqrt{1-(x-1)^2} \leq y \leq \sqrt{1-(x-1)^2}$.
- Si se plantea integrales dobles en sistemas de coordenadas polares, se prevé que la dificultad esté asociada a reconocer que la región de integración en el plano polar no es un rectángulo, ya que en el plano cartesiano no es una circunferencia centrada en el origen, sino que está trasladada en el eje *x*. Los límites de integración resultarían: $0 \leq r \leq 2\cos\theta$ y $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. La función integrando resultaría de multiplicar 3 por el valor del *Jacobiano* "*r*".
- Si se plantean integrales triples en sistemas de coordenadas cartesianas, el valor de la función integrando sería $f(x,y,z) = 1$ y los límites de integración: $0 \leq x \leq 2, -\sqrt{1-(x-1)^2} \leq y \leq \sqrt{1-(x-1)^2}y0 \leq z \leq 3$.
- Si se plantean integrales triples en sistemas de coordenadas cilíndricas, el valor de la función integrando sería igual a la unidad multiplicada por el factor de corrección *r* (*Jacobiano*). Los límites de integración resultarían: $0 \leq r \leq 2\cos\theta, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}y0 \leq z \leq 3$.
- Otro procedimiento podría ser contemplar que el volumen de la región que se quiere determinar es el mismo si el cilindro estuviese trasladado al origen de coordenadas (invariancia del volumen ante traslaciones y rotaciones). En este caso, si se utiliza un cambio de coordenadas, el planteo de las integrales resultaría ser más sencillo, ya que:
    - Si se plantea integrales dobles en coordenadas polares, los límites de integración estarían dados por $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y la función integrando resultaría de multiplicar 3 por el valor del *Jacobiano* "*r*".
    - Si se plantea integrales triples en coordenadas cilíndricas, los límites de integración estarían dados por $0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $0 \leq z \leq 3$.El valor de la función integrando sería igual a la unidad multiplicada por el factor de corrección *r* (*Jacobiano*).

Cabe aclarar que este último procedimiento se puede argumentar de dos maneras, una de ellas sujeta a una mirada estrictamente geométrica y visual, ya que el volumen de un sólido no se modifica si sufre una traslación, o bien desde un punto de vista analítico recurriendo a la traslación de cónicas: $x_1 = x - h$ e $y_1 = y$, obteniéndose $x_1^2 + y_1^2 = 1$.

Región B:
A diferencia de la región A, en este caso no es factible recurrir a la geometría elemental, se debería utilizar las técnicas de integración tal como se mencionó en el caso anterior.

Las posibles formas de planteo de cálculo de volumen son los siguientes:

- Si se plantea integrales dobles en sistemas de coordenadas cartesianas, deberían lograr: identificar la función a integrar $f(x,y)$ como la diferencia entre $z=x^2+y^2$ y $z=0$. Asimismo la región de integración como la proyección en el plano *xy* de la intersección entre el cilindro y el paraboloide, que en este caso resulta ser la circunferencia $x^2+y^2=1$. La variación de x sería $-1\leq x\leq 1$ y la variación de *y*: $-\sqrt{1-x^2}\leq y\leq\sqrt{1-x^2}$.
- Si se plantea integrales dobles en sistemas de coordenadas polares la región de integración en el plano polar es un rectángulo, dado por: $0\leq r\leq 1$ y $0\leq\theta\leq 2\pi$. La función integrando resultaría de multiplicar r^2por el valor del *Jacobiano r.*
- Si se plantean integrales triples en sistemas de coordenadas cartesianas, el valor de la función integrando sería $f(x,y,z)=1$ y los límites de integración:

  $-1\leq x\leq 1$,$-\sqrt{1-x^2}\leq y\leq\sqrt{1-x^2}y0\leq z\leq x^2+y^2$
- Si se plantean integrales triples en sistemas de coordenadas cilíndricas, el valor de la función integrando sería igual a la unidad multiplicada por el factor de corrección *r*. Los límites de integración resultarían: $0\leq r\leq 1, 0\leq\theta\leq 2\pi$ y $0\leq z\leq r^2$.

Ítem 1.3)

La región elegida para hallar el volumen dependerá de lo realizado en el ítem anterior:

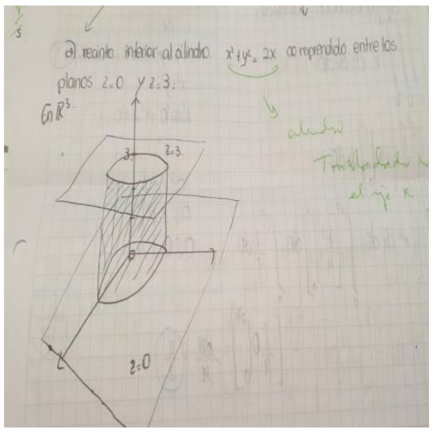
- Se espera la elección de la región **A,** en el caso de que los estudiantes se percaten de las posibilidades que ofrece la geometría elemental y/o la invariancia del volumen ante rotaciones y traslaciones para el cálculo del mismo. Para este caso, no se prevé mayores dificultades en el manejo algebraico.
- Si lo descrito en el párrafo anterior no emergió, se espera que la elección sea el cálculo del volumen de la región **B**, ya que las transformaciones involucradas en el proceso del cambio de variables, generan una región más sencilla de integración. De acuerdo al tipo de coordenadas que se elijan, serán más o menos complejos los cálculos asociados a éste proceso. Se espera que la mayor dificultad se presente al momento de la resolución de integrales planteadas en coordenadas cartesianas.

Procedimientos observados en la resolución de los parciales: fase experimental

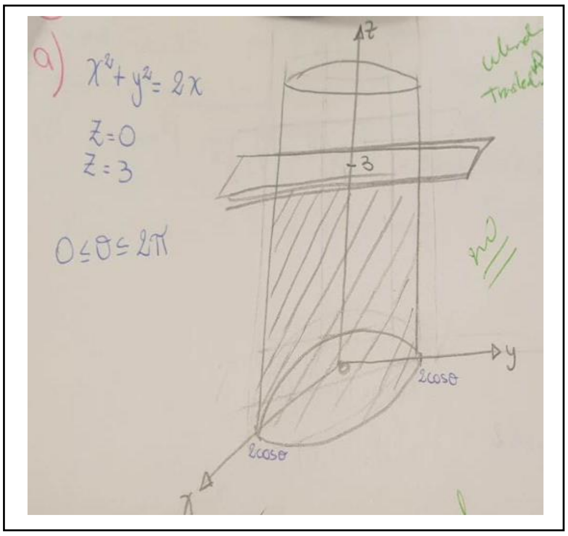
Ítem 1.1)

Se citan a continuación las producciones de tres alumnos que representaron de manera incorrecta la región A, dado que no lograron identificar el desplazamiento del cilindro. En cuanto a la región B no se presentaron inconvenientes en la representación de la región.

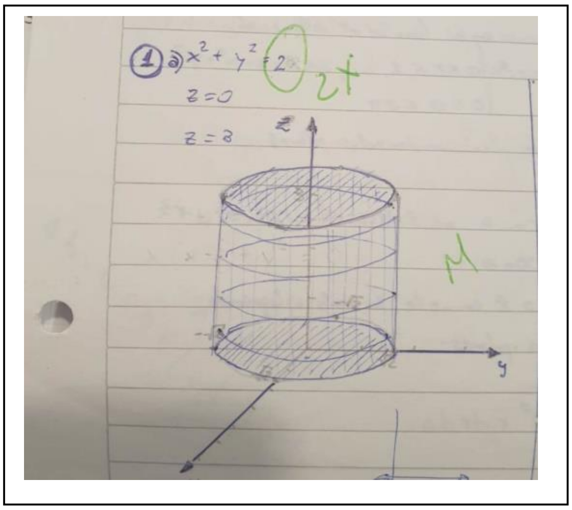
Figura 2: Representaciones gráficas de la Región A realizada de manera incorrecta por tres estudiantes



(a)



(b)



(c)

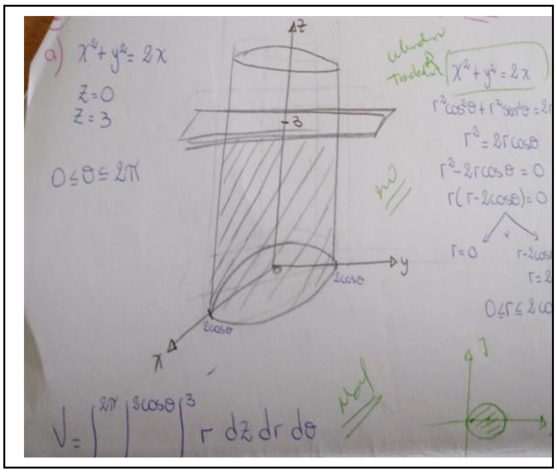
Ítem 1.2)

Plateo del volumen de la Región A

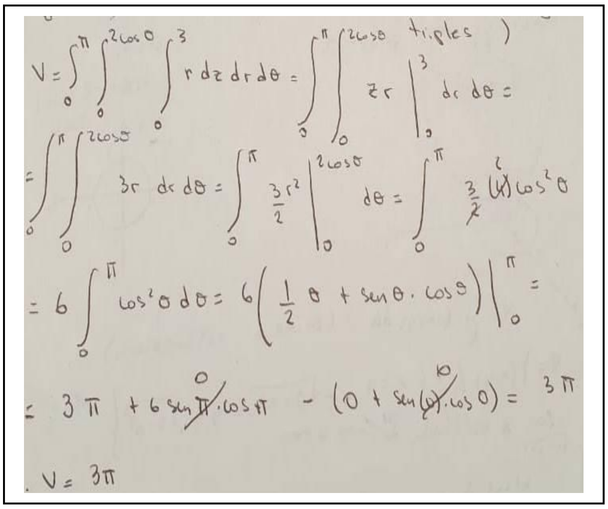
En las resoluciones analizadas se detectó lo siguiente:

- Los tres alumnos que graficaron de manera incorrecta la región, mencionados anteriormente, además tuvieron dificultades en el planteo del volumen. Se observó que si bien manipularon correctamente la expresión algebraica $x^2 + y^2 = 2x$ en el proceso de transformación a coordenadas cilíndricas para obtener los límites de integración de r, no les permitió detectar que ante la presencia de un radio variable, la representación gráfica realizada no se correspondía con lo obtenido en el registro algebraico (imagen (a)).
- En las propuestas con gráficos válidos se observó que, uno se planteó en coordenadas cartesianas correctamente y no así en cilíndricas (imagen (c)), tres utilizaron coordenadas cilíndricas, pero determinaron mal uno de los límites de integración para la variable θ (imagen (b), (c) y (d)) y sólo uno recurrió al uso de coordenadas cilíndricas y polares sin obtener resultados favorables.

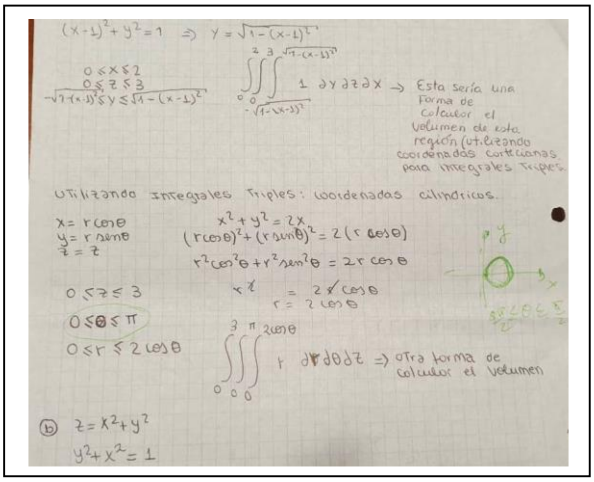
Figura 3. Planteo de integrales realizada por los estudiantes para la región A utilizando diferentes sistemas de coordenadas.



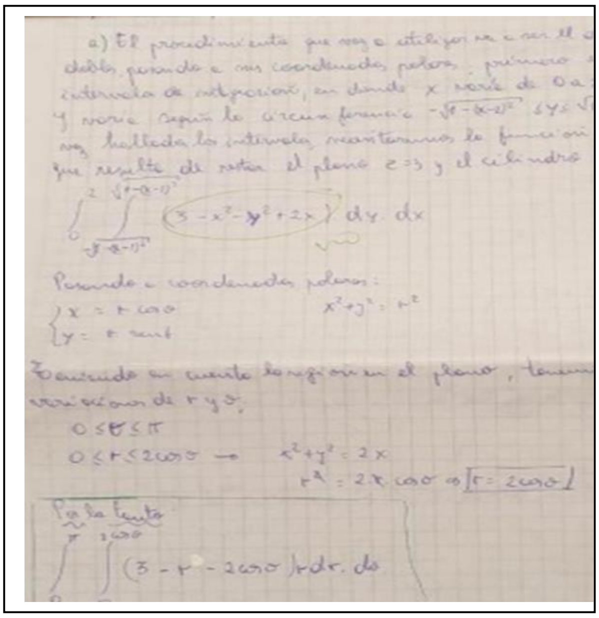
(a)



(b)



(c)



(d)

Plateo del volumen de la Región B

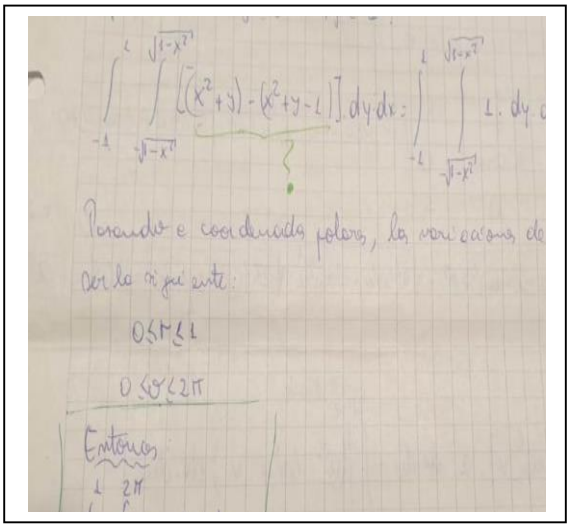
La mayoría de los alumnos no tuvo inconvenientes en el planteo del volumen, las coordenadas más elegidas fueron las cilíndricas. Solo dos alumnos presentaron dificultades:

- En uno de ellos, tanto en coordenadas cartesianas como en polares, el error se detectó en la obtención de la función integrando (imagen (a)).
- En la imagen (b) el error también se observó en la obtención de la función integrando bajo coordenadas polares. En coordenadas cartesianas se realiza en forma correcta.

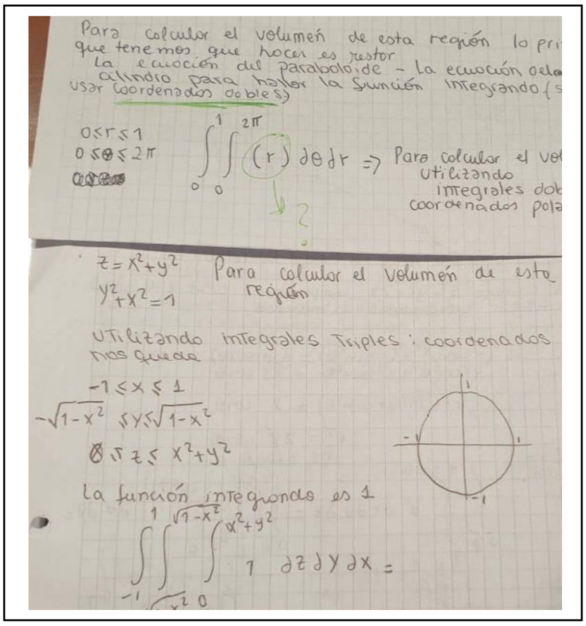
Ítem 1.3)

Seis alumnos eligieron la región B para calcular el volumen, de ellos cinco resolvieron correctamente. Los restantes eligieron la región A, pero dado que en el ítem anterior el planteo del volumen ya había presentado dificultades, el resultado obtenido es incorrecto.

Figura 4. Planteo de integrales realizada por los estudiantes para la región B utilizando diferentes sistemas de coordenadas.



(a)



(b)

Contraste entre análisis a priori y a posteriori

Ítem 1.1)

De las dificultades previstas para la representación de la región A, emergió la referida al desplazamiento del cilindro, ya que el centro del mismo fue representado en el origen de coordenadas. En cuanto a la región B, no se presentaron dificultades en su identificación.

Ítem 1.2)

En el planteo del volumen para la región A, no emergió el uso de la fórmula del volumen de un cilindro como así tampoco la invariancia del volumen ante traslación y rotación.

(a)

Uno de los errores observado, y no previsto en el análisis a priori, fue la determinación de los límites de integración del ángulo en coordenadas cilíndricas o polares.

Para la región B, tal como se había previsto, emergieron los cambios de coordenadas anticipados.

La identificación incorrecta de la función integrando para el cálculo del volumen, fue uno de los obstáculos detectados en dos resoluciones. Esta posibilidad no fue anticipada en el análisis a priori.

Ítem 1.3)

La mayoría de los alumnos eligió la región B para calcular el volumen.

En cuanto al manejo algebraico presente en el proceso de integración no se detectaron mayores dificultades, incluso en aquellos casos donde el planteo del volumen (ítem 1.2) fue realizado de manera incorrecta.

Reflexiones

- Dado que en la consigna se explicita el nombre de la superficie a representar, no es posible determinar si el alumno es capaz de reconocer a partir del registro algebraico, la representación gráfica asociada. Por esta razón, como docentes, se cree conveniente diseñar consignas donde el nombre de la superficie esté implícito.
- Se cree que una de las posibles causas del error observado en la representación del cilindro trasladado pudiera estar asociado a la preferencia, tanto en lo bibliográfico como en el trabajo áulico, del uso (representación, cálculo de volumen, etc) de superficies centradas en el origen.
- A partir de las resoluciones de los estudiantes se observa dificultades en la articulación de registros de representación de un mismo objeto matemático, tal como fue detectado para la expresión$x^2 + y^2 = 2x$.
- La región A presenta la particularidad de ser un cilindro circular recto, lo cual posibilita el uso de la fórmula ($V = \pi . r^2 . h$)para el cálculo del volumen, sin usar integrales múltiples. A pesar de la simplicidad de la región este cálculo no emergió ni como procedimiento de resolución, ni como mecanismo de control en caso de haber utilizado las integrales múltiples. Esto nos hace pensar la importancia de generar espacios en los cuales el alumno pueda recurrir al uso de

saberes previos para la validación de los resultados obtenidos.

Lo observado anteriormente, no es una cuestión inherente a este caso en particular, los docentes de este grupo de investigación han detectado de manera recurrente cómo el alumno, frente a la construcción de nuevos conocimientos, suele dejar de lado aquellos saberes adquiridos en otras instancias de aprendizaje durante su formación académica.

- La representación gráfica en forma correcta no asegura que la identificación de los límites de integración sea adecuada, en particular cuando se implementa cambios de coordenadas en superficies no centradas en el origen. Esto nos permite reflexionar acerca de las actividades que se les propone a los estudiantes durante el proceso de enseñanza y aprendizaje de estos contenidos, en las cuales se debería contemplar un mayor tratamiento de la correspondencia que existe entre una región dada en coordenadas cartesianas y su correspondiente en el sistema de coordenadas con el que se quiera trabajar.
- En el planteo de las integrales dobles se observa dificultad para detectar la función integrando, tanto en coordenadas cartesianas como en polares. No resulta claro identificar si el alumno toma como función integrando una de las superficies, la que comúnmente se considera como “techo”, o como una variación entre las superficies, “techo” y “piso” de la región de integración.
- La propuesta realizada nos permitió detectar que las mayores dificultades en el tratamiento de las integrales múltiples, por parte de los estudiantes, no estuvieron dadas en la resolución algebraica sino en la representación gráfica, la determinación de los límites de integración y la utilización de diferentes sistemas de coordenadas.

Bibliografía

1. Ander-Egg, E. (2010) Métodos y Técnicas de investigación social, Vol. III: Cómo organizar el trabajo de investigación. Lumen, España.
2. Artigue, M (1995). Ingeniería Didáctica. En Artigue M., Douady R., Moreno L.,Gómez P., Ingeniería Didáctica para la Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas. México. Grupo Editorial Iberoamérica.
3. Bardin, L. (1996) El análisis de contenido. Madrid. Akal
4. Brousseau, G. (1983). Les obstacles epistemologiques et les problèmes en mathèmatiques. Recherches en Didactique des Mathematiques, 4(2),164-198.
5. D´Amore, B., Godino, J., Fandiño, M. (2008) Competencias y matemática. Bogotá. Didácticas Magisterio.
6. Rico, L. (1995). Errores en el aprendizaje de las Matemáticas. En Kilpatrick, J., Rico, L y Gómez, P. “Educación matemática”. México. Grupo Editorial Iberoamérica.